Mittelineaarsed struktuurid

Puu. Kahendpuu.
Puude läbimine ja realisatsioon.

Graaf

Ainult lineaarses vormis ei ole võimalik kõiki elulisi andmeobjektide vahelisi seoseid modelleerida.

Graaf on üldisem struktuur, mille abil saab modelleerida objektide hulgas paari-kaupa esinevaid suhteid või seoseid.

Erijuhul võib olla ka siin tulemuseks lineaarne struktuur. Üldiselt saame aga üsna suvalise kujuga tippudest ja servadest koosneva võrgu.

Graafist täpsemalt edaspidi.

Puu

Puu on graafi erivorm.

Puu koosneb elementidest, mida nimetatakse **tippudeks** e **sõlmedeks** *(node)*, ja seostest tippude vahel, mida nimetatakse **kaarteks** *(edge)*. Andmed paigutatakse puu tippudesse.

Elementide paiknemisel puus üksteise suhtes (ehk seostel tippude vahel) on reeglina tähendus.

Puustruktuur on andmete struktuur, milles olemid või atribuudid on tippudeks, ühelgi tipul ei ole üle ühe ematippu ja juurtippe on ainult üks. (IT terministandardi sõnastik – IT TS)

Puu definitsioon

Rekursiivne definitsioon *D. Knuth'i* järgi:

Puu *(tree)* on lõplik hulk T, koosnedes ühest või mitmest sõlmest, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

a) eksisteerib üks, teistest erinev sõlm, mis on antud **puu juur** *(root)*

b) teised sõlmed jagunevad `m (m>=0)` mittelõikuvaks alamhulgaks `T1 ...Tm` ja iga alamhulk on omakorda puu. Hulki `T1 ...Tm` nimetatakse antud puu **alampuudeks** *(subtree)*

Mõisted (1)

Sõlm või **tipp** *(node)* – element, millest puu koosneb. Tippudes paiknevad andmed. Puu struktuuriga määratakse andmete vahelised seosed.

Tipu järk *(degree)* – tipu alampuude arv.

Puu järk – suurim lubatud tipu järk puus.

Puud, mille kõigil tippudel on maksimaalne alampuude arv piiratud arvuga `n`, nimetatakse **n-järku puuks**.

Tippude paiknemise selgitamiseks kasutatakse sugulussuhetega seotud mõisted (mida ei ole siin mõtet pikemalt kirja panna).

Mõisted (2)

Juur (ka juurtipp) *(root, root node)* – tipp, millele ei eelne mitte ühtegi sõlme.

Leht *(leaf, terminal node)* – sõlm, mille järk on 0 (alluva tiputa tipp (IT TS))

Puu tipud jagunevad paiknemishierarhia järgi **tasemetesse** *(level)*. Juur on tasemel 0, juure lapsed tasemel 1 jne.

Puu kõrgus *(height)* määratakse vastavalt tasemete arvule. See on suurim kaugus puus juure ja lehe vahel.

Mõisted (3)

Järjestamata puu *(unordered tree)* on puu, kus ühe tipu laste omavaheline järjestus ei ole määratud (ei oma tähendust).

Järjestamata puu on **orienteeritud** *(oriented tree)* – hierarhilised seosed on olemas.

Järjestatud puus *(ordered tree)* on ühe tipu laste järjekord mingil viisil määratud, järjekorral on tähendus.

Tavaliselt on puud järjestatud ("puu") ja tema vastandiks on "orienteeritud puu" (järjestamata).

Mõisted (4)

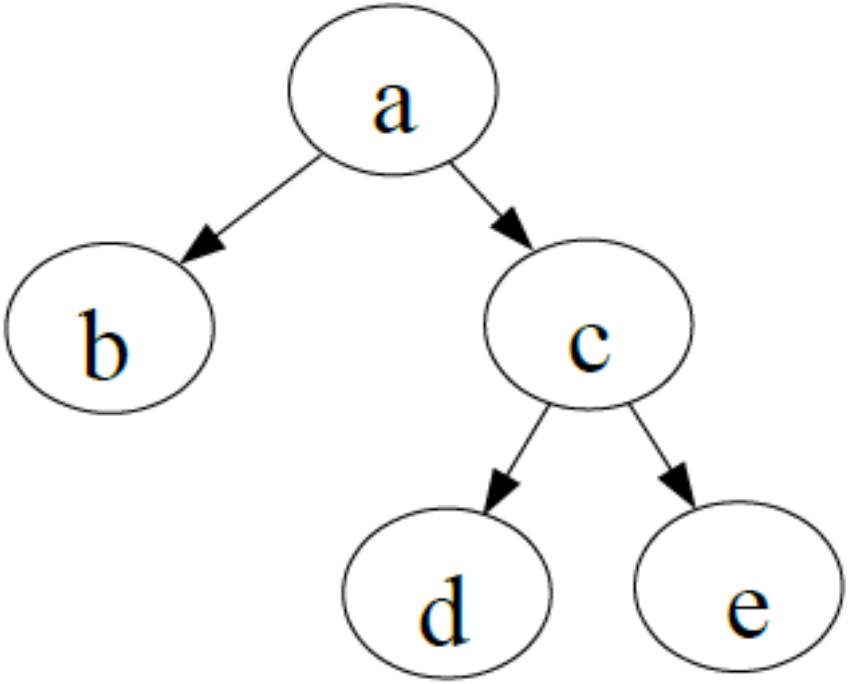
Kõik antud tipust kõrgemal (juure pool) olevad tipud on tipu **eellased** *(ancestor).*

Kõik antud tipust allpool olevad tipud on tipu **järglased** *(descendant).*

Tee *(path)* on ainus, lühim kaarte järgnevus, mis viib puu juurtipust leheni. Puu juurtipu ja iga lehe vahel on ainult üks tee.

Tee võib olla määratud ka suvalise tipuni.

Näide puust



Puude esitamine

Joonisena – lihtsaim mõista. Juur on reeglina ülal.

Tekstina (näited eelmise slaidi kohta)**:**

Sulgavaldis: puu erinevad tasemed "sulustatakse" nt (a(b)(c(d)(e)))

Dewey kümnendesitus *(Dewey decimal notation)*: süsteem sarnaneb kirjutise peatükkide nummerdusele (kajastub nii tippude omavaheline järjestus kui hierarhia). nt 1 a; 1.1 b; 1.2 c; 1.2.1 d; 1.2.2 e

Kahendpuu

Kahendpuu *(binary tree)* on tippude lõplik hulk, mis on tühi või mis koosneb juurtipust ja kahest mittelõikuvast alampuust, mida nimetatakse antud juurtipu **vasakuks** ja **paremaks alampuuks** *(left and right subtree)*.

Kahendpuu igal tipul on maksimaalselt kaks alampuud (2-järku puu). Kuid on oluline, kas ta on vasak alampuu või parem alampuu.

Eksisteerib **tühja alampuu** mõiste.

Seega kahendpuu ei ole sama kui 2-järku puu.

Täielik kahendpuu

Kahendpuu on **täielik** *(perfect / complete)*, kui kõik tema lehed paiknevad ühel tasemel ja kõigil ülejäänud tippudel on kaks last.

Peaagu täielikus kahendpuus võivad lehed puududa vaid viimasel tasemel paremalt poolt.

Tippude arvudest:

- tasemel n on 2^n lehte (juure tase on 0 jne)
- puus kõrgusega h on maksimaalselt $2^{h+1}-1$ tippu ja 2^h lehte
- m tipuga puu kõrgus on $\log_2(m+1)-1$

Puude kasutamine

Kui andmete olemus on **hierarhiline**.

Avaldised jt keele osad **süntaksipuuna** (ka HTML DOM).

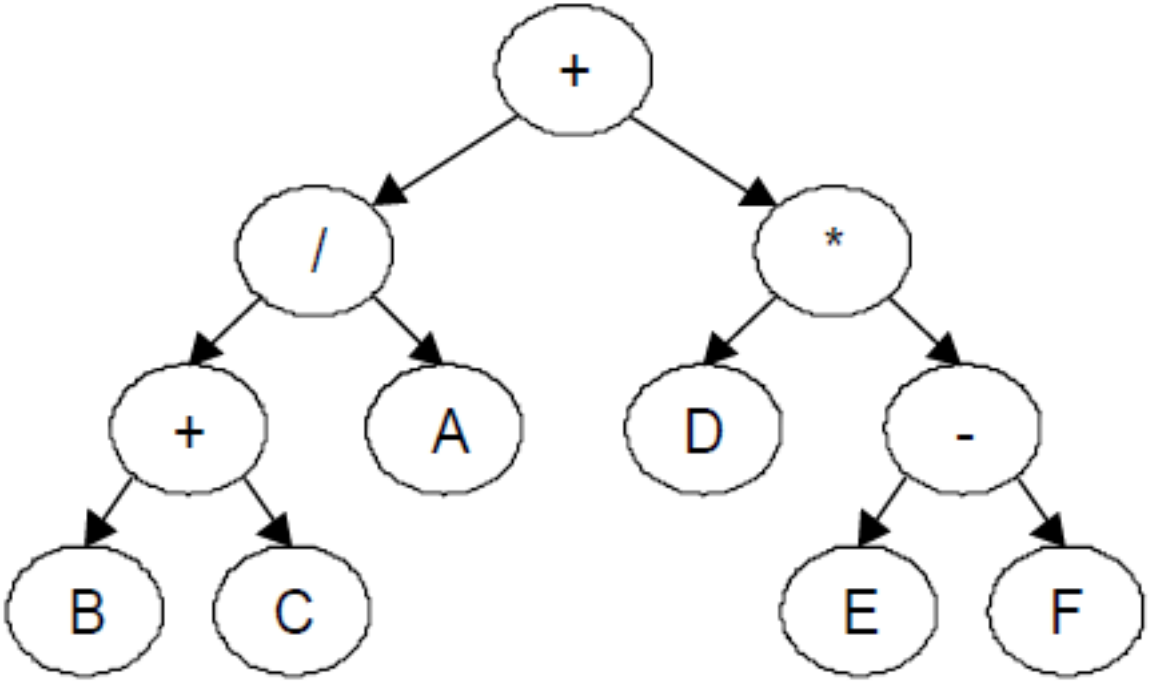
Erinevad **otsingupuud** *(search tree)* otsimise kiirendamiseks (kahendotsingupuu, *trie*).

Kahendkuhi *(binary heap)* kiireks elementide paigutamiseks ja kättesaamiseks.

Puu sobib aluseks mittelineaarsetele andmestruktuuridele ning mitmed tegevused puus on keerukusega $O(\log_2 N)$.

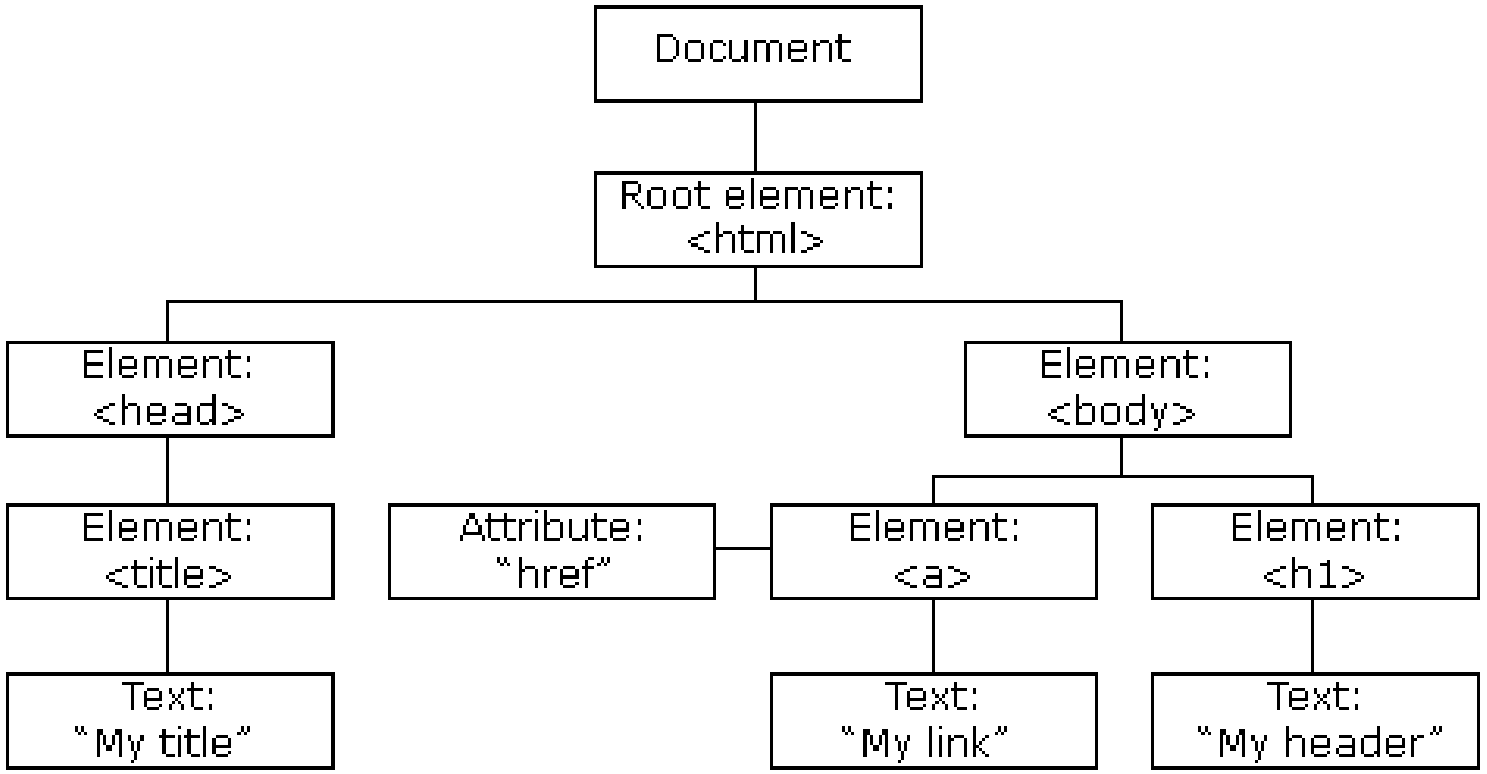
Erinevates puustruktuurides on elementide asetsemisel omad reeglid.

Näidispuu (avaldis)



HTML-i DOM mudel

https://www.w3schools.com/whatis/whatis_htmldom.asp



Puu kõigi tippude läbimine

Süviti otsing *(depth-first search).* Tippude läbimise loogika on seotud pinuga.

```
Pane juur pinusse
Kuni pinu ei ole tühi korda
    Võta sõlm pinust (ja trüki välja)
    Lisa pinusse tipu lapsed (kui nad on olemas)
```

Laiuti otsing *(breadth-first search).* Tippude läbimise loogika on seotud järjekorraga.

```
Pane juur järjekorda
Kuni järjekord ei ole tühi korda
    Võta sõlm järjekorrast (ja trüki välja)
    Lisa järjekorda tipu lapsed (kui nad on olemas)
```

Kahendpuu läbimine süviti (1)

Lõppjärjekord *(Postorder e. Endorder)*

1. Kui võimalik, liigu vasakusse alampuusse
2. Kui võimalik, liigu paremasse alampuusse
3. Väljasta (töötle) juur

14. slaidil oleva puu läbimise väljundiks oleks:

B C + A / D E F - * + .

Selgituseks: "Liigu vasakusse alampuusse" tähendab, et sama 3-sammulist tegevust korratakse rekursiivselt antud tipu vasaku lapsega (kui viimane on olemas).

Kahendpuu läbimine süviti (2)

Eesjärjekord *(Preorder)*

1. Väljasta (töötle) juur
2. Kui võimalik, liigu vasakusse alampuusse
3. Kui võimalik, liigu paremasse alampuusse

14. slaidil olnud puu läbimine annaks tulemuse:

+ / + B C A * D – E F

Kahendpuu läbimine süviti (3)

Keskjärjekord *(Inorder)*

1. Kui võimalik, liigu vasakusse alampuusse
2. Väljasta (töötle) juur
3. Kui võimalik, liigu paremasse alampuusse

Juba tuttav avaldisepuu 14. slaidil annab tulemuse:
B + C / A + D * E – F

Puu ja rekursioon

Puu definitsioon on rekursiivne – puu defineeritakse kasutades mõistet puu.

Puu on oma olemuselt rekursiivne: puu koosneb juurest ja alampuudest, millest igaüks koosneb juurest ja alampuudest, millest igaüks ...

Puu tippude süviti läbimisi (kõik kolm varianti) saab realiseerida rekursiivse funktsiooniga.

Puu läbimise selgitus koos animatsiooniga:

https://csanim.com/tutorials/inorder-preorder-and-postorder-tree-traversals-animated-guide

Rekursioon

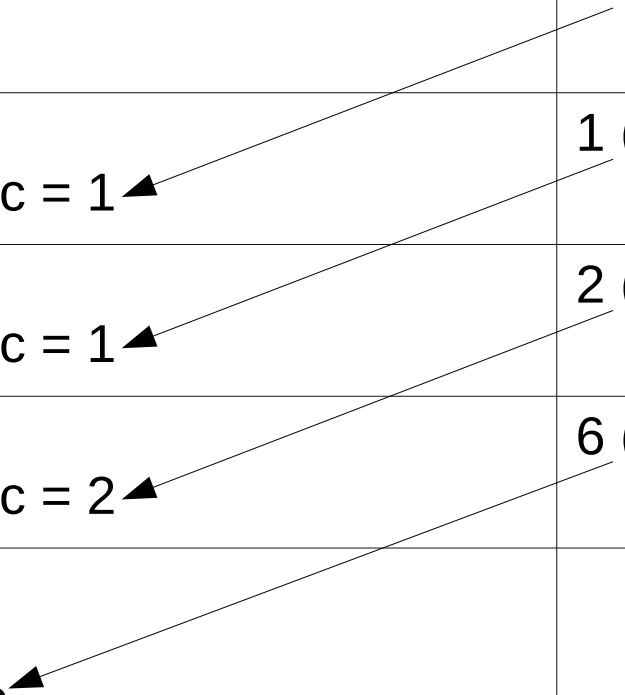
Rekursiivne funktsioon on funktsioon, mis iseennast välja kutsub, püüdes selle käigus tavaliselt lahendada ülesande lihtsamat alamjuhtu. (**Rekursioon** vt rekursioon)

Tüüpiline rekursiivse funktsiooni näide on faktoriaali leidmisest:

```
int Fact(int n){
    int rec;
    if(n==1)
        return 1;
    else {
        rec = Fact(n-1);
        return(n*rec);
    }
}
```

Funktsioonide väljakutsed

Funktsiooni väljakutsed pinus	return tagastab 1 või N*rec
Fact(0) N = 0	1 (return 1)
Fact(1) N = 1, rec = 1	1 (return N*rec)
Fact(2) N = 2, rec = 1	2 (return N*rec)
Fact(3) N = 3, rec = 2	6 (return N*rec)
main() arv = 3 vastus=6	



Veel tegevusi puus

Alati ei ole vaja kõiki tippe läbida. Mõned näited:

Tipu lisamine (tihti lehtedeks, harvem keskele).

Tipu kustutamine.

Paljudel juhtudel on ülesande lahendamiseks vaja läbida üks tee (mis oli tee? - tippude jada juurtipust leheni).

Kui kaugele jääb leht juurtipust? - kui puu on täielik, siis N tipu korral on sammude arv $\log_2 N$

Sellest keerukusklass $O(\log_2 N)$

Puu realisatsioon

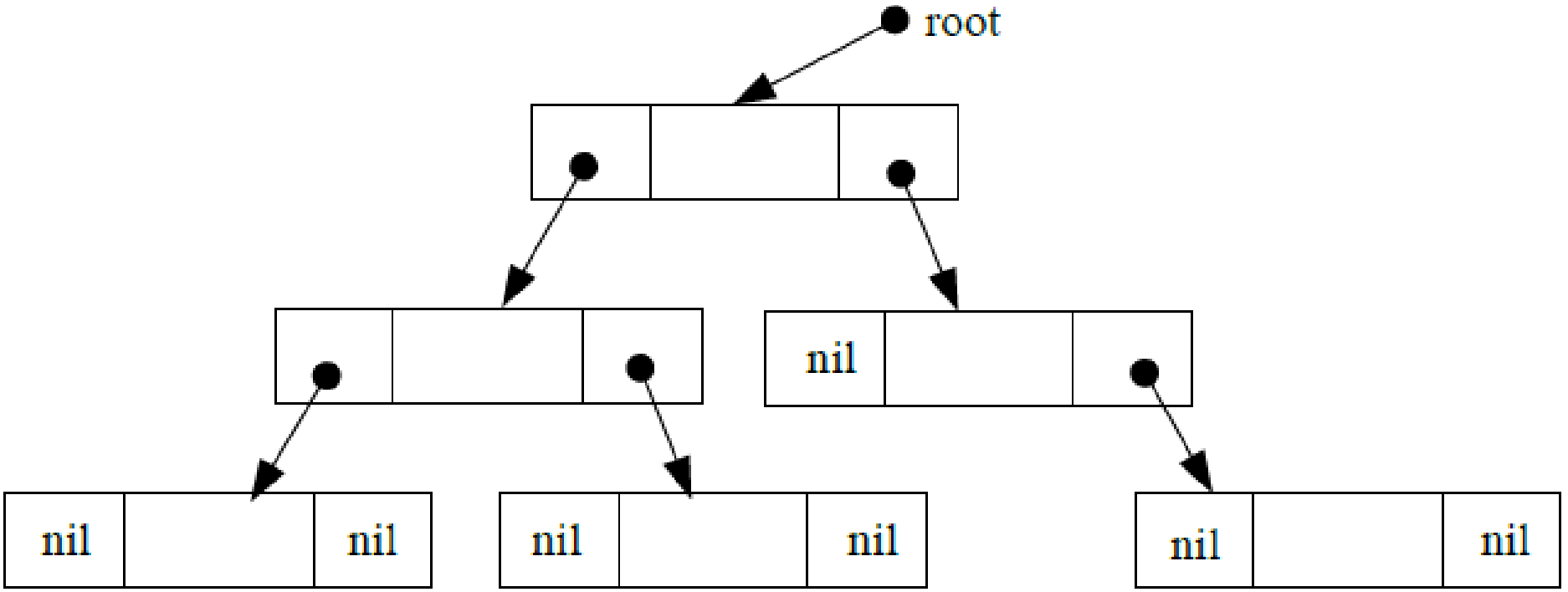
Tavaliselt toimub puu realisatsioon **dünaamiliselt** (analoogiliselt ahelloendiga).

Võimalikud on ka kokkulepped puu realiseerimiseks **massiivina** (nt kahendkuhja jaoks).

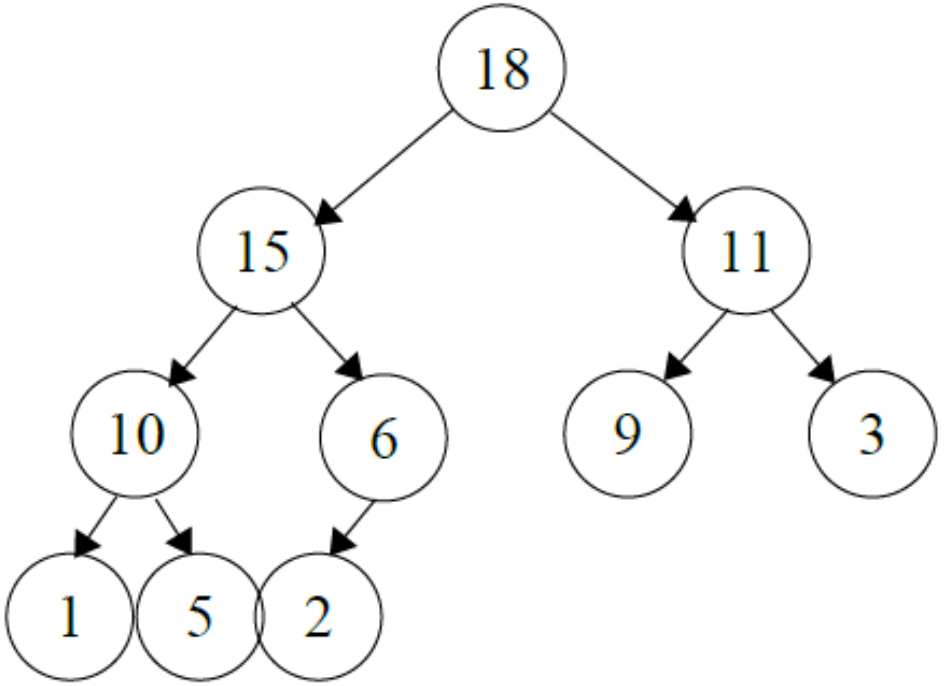
Koodi on otstarbekam pikast materjalist ja näidetest uurida.

Dünaamilise puu näide on puude materjalis, kahendkuhja on aga kirjeldatud sorteerimise materjalis.

Dünaamiline realisatsioon



Realisatsioon massiiviga (kuhi)



Joonis 1 Kahendkuhi puuna

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
18	15	11	10	6	9	3	1	5	2